المحاضرة الاولى

مفهوم المتغيرة العشوائية المتقطعة وتوزيعها الاحتمالي[1]

مفهوم المتغيرة العشوائية
مفهوم المتغيرة العشوائية المتقطعة
التوزيع الاحتمالي للمتغيرة العشوائية المتقطعة
شروط دالة الكثافة للمتغيرة العشوائية المتقطعة
التمثيل البياني لدالة الكثافة للمتغيرة العشوائية المتقطعة
دالة التوزيع للمتغيرة العشوائية المتقطعة

مسألة: أجريت دراسة على ١٠٠٠ طفل أصيب خلال السنوات الثلاث الأولى من عمره بمرض ما.

بينت الدراسة أن احتمال الإصابة مرتبط بالزمن (X: السنة) من خلال دالة الكثافة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} cx^2, & 0 < x < 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

✓ أحسب احتمال أن تكون إصابة طفل مختار عشوائيا من العينة المدروسة في السنة الأولى.

يعالج المرض لمدة شهر، شهر ونصف، أو ٣ أشهر حسب الجدول التالي:

X الأشهر	١	١.٥	٣
الاحتمال	٠.٥	٠.٣	٠.٢

✓ أحسب احتمال أن تكون مدة علاج طفل من العينة شهر ونصف على الأكثر.

مفهوم المتغيرة العشوائية

هي قيمة متغيرة يلحق بقيمها احتمالات تحقق كل قيمة. يرمز للمتغيرة ع بحرف لاتيني كبير. ونميز بين م ع المتقطعة وم العشوائبة المتصلة أو المستمرة.

مثال : في تجربة إلقاء مكعب نرد يمكن أن نسمي الوجه الذي يستقر عليه الكعب متغيرة عشوائية X. القيم الممكنة لX هي: ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦. بكل قيمة يمكن أن نلحق احتمال تحققها، وهو هنا 1/6. ونكتب مثلا :

$P(X = 1) = f(1) = 1/6,\ P(X = 2) = f(2) = 1/6, \ldots$

لاحظ أن القيم الممكنة ل X (١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦) هي متنافية، ولذلك فإن مجموع احتمالاتها يساوي ١.

$$\sum_{x=1}^{6} P(X = x) = 1$$

مثال ٢. في تجربة إلقاء قطعة نقدية مرتين يمكن أن نعين المتغيرة العشوائية X التي تمثل عدد مرات الحصول على كتابة. في هذه الحالة القيم الممكنة ل X هي ٠، ١، ٢. لا حظ أنه يمكن تعيين متغيرات عشوائية أخرى انطلاقا منن نفس التجربة، مثلا Y عدد مرات الحصول على صورة، وهي متغيرة تأخذ القيم ٠، ١، ٢، ثم المتغيرة Z بحث Z = X - Y …

القيم الممكنة ل X هي ٠، ٢، -٢. الاحتمالات الملحقة بقيمها يمكن حسابها كما يلي:

$P(Z = 0) = P(X - Y = 0) = P(X = 0 \text{ et } Y = 0 \text{ ou } X = 1 \text{ et } Y = 1 \text{ ou } X = 2 \text{ et } Y = 2) \Rightarrow$

$P(Z = 0) = 0 + P(X = 1 \text{ et } Y = 1) + 0 = 2 * 0.5^2 = \mathbf{0.5}$

[1] في البرنامج الأصلي: ١- مفهوم المتغيرة العشوائية. اخترنا هذا التقسيم لكي يتناسب كل جزء مع الزمن المخصص للمحاضرة.

المتغيرة العشوائية المتقطعة

و تسمى أيضا م ع منفصلة، وهي التي تأخذ عددا منتهيا من القيم الممكنة في مجال مغلق.

مثال: داخل المجال المغلق [2, 5] المتغيرة X المعرفة في المثال الأول تأخذ ٤ قيم ممكنة.

التوزيع الاحتمالي للمتغيرة المتقطعة

هي مجموعة القيم الممكنة مع الاحتمالات المرتبطة بقيم المتغيرة. نرمز للمتغيرة بحرف كبير وللقيم التي تأخذها المتغيرة بحرف صغير. نعبر عن احتمال قيمة معينة كما يلي $P(X = x)$ ونكتب أيضا : $f(x)$. وتسمى الدالة $f(x)$ دالة الكثافة الاحتمالية.

مثال: التوزيع الاحتمالي لم ع للمثال الأول (إلقاء مكعب نرد) يكتب كما يلي:

X	1	2	3	4	5	6	
P(X = x)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

مثال ٢. التوزيع الاحتمالي ل X، عدد مرات الصورة في رميتين لقطعة نقدية:

X	0	1	2	
P(X = x)	1/4	2/4	1/4	1

شروط دالة الكثافة للمتغيرة المتقطعة

نعبر عن احتمال قيمة معينة كما يلي $P(X = x)$ ونكتب أيضا : $f(x)$ وتسمى الدالة $f(x)$ دالة الكثافة الاحتمالية.

لكي يمكن اعتبار دالة ما، أيا كانت، دالة كثافة احتمالية يجب أن يتحقق شرطان اثنان:

$$1) \qquad f(x) \geq 0$$
$$2) \qquad \sum_x f(x) = 1$$

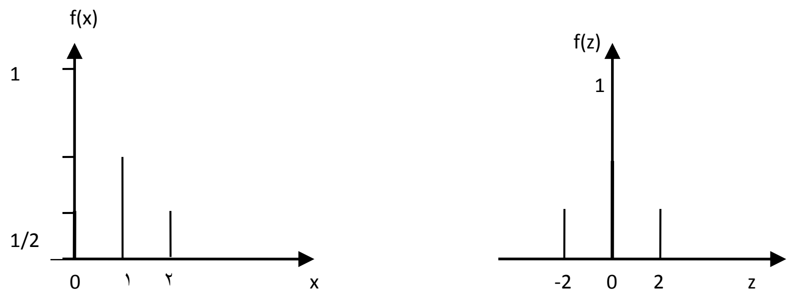
مثال: نأخذ دالة الكثافة ل X نتيجة لإلقاء حجر نرد: $f(1) = f(2) = f(3) = \ldots f(6) = 1/6 \geq 0$,

الشرط الأول محقق، والشرط الثاني أيضا لأن: $\Sigma f(x) = 1/6 + 1/6 + \ldots + 1/6 = 6(1/6) = 1$

التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية ل م ع المتقطعة

تمثل المتغيرة العشوائية المتقطعة ليس من خلال منحنى ولكن من خلال أعمدة متوازية على محور X.

مثال: نمثل بيانيا منحنيات دوال الكثافة ل X وZ المعرفة على إلقاء قطعة نقدية مرتين.



رسم 1 التمثيل البياني لدالة الكثافة للمتغيرة العشوائية المتقطعة

دالة التوزيع F(x) **للمتغيرة العشوائية المتقطعة**

تعرف دالة التوزيع – وتسمى أيضا "الدالة التجميعية" –كما يلي:

$$\mathbf{F(x) = P(X \le x)}$$

ويمكن استنتاج دالة التوزيع من دالة الكثافة الاحتمالية f(x) كما يلي:

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{u \le x} f(u)$$

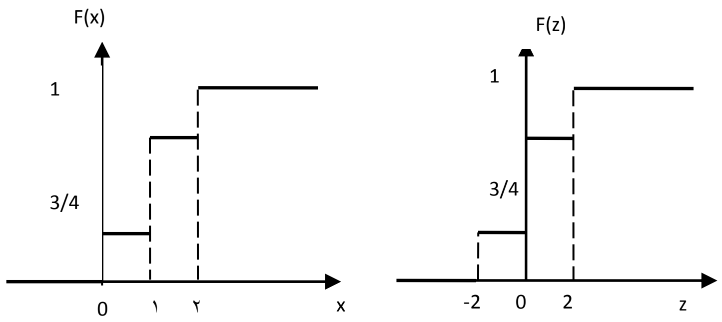
إذا كانت X تأخذ عددا منتهيا من القيم فإن F(x) يمكن تعريفها كما يلي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -\infty < x < x_1 \\ f(x_1) & , \quad x_1 \le x < x_2 \\ f(x_1) + f(x_2) & , \quad x_2 \le x < x_3 \\ \cdots & \\ f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n), & \quad x_n \le x < +\infty \end{cases}$$

مثـال: أوجـد قـيم F(x) وF(z) للأمثلة السابقة ومثلهما بيانيا.

X	0	1	2
f(x)	1/4	1/2	1/4
F(x)=P(X≤x)	1/4	3/4	1

Z	-2	0	2
f(x)	1/4	1/2	1/4
F(x)=P(X≤x)	1/4	3/4	1



رسم 2 التمثيل البياني لدالة التوزيع للمتغيرة العشوائية المتقطعة

ملاحظة. تأخذ دالة التوزيع للم ع المتقطعة شكلا سلميا، وهي لا تكون متناقصة في أي مجال، وأكبر قيمة ممكنة لها هي ١.